ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ
Γ Λυκείου

Ζήτημα ①

A1 ⟶ σελ 31 A2 ⟶ σελ 148 A3 ⟶ σελ 96

A4 ⟶ α) → Λ β) → Σ γ) → Λ δ) → Σ ε) → Σ

Ζήτημα ②

B1 Από το πολύγωνο των $F_i\%$ διαπιστώνω ότι το 50% των παρατηρήσεων αντιστοιχεί στην τιμή 25 άρα $\boxed{\textbf{διάμεσος } \delta = 25}$

B2 Ξέρουμε ότι η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει το σύνολο των παρατηρήσεων σε 2 ίσα μέρη. Έτσι από τον πίνακα που δίνεται έχουμε:

$v_1 + v_2 = v_3 + v_4 \Leftrightarrow \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow 4\alpha - 2 = 3\alpha + 6$

$$\boxed{\alpha = 8}$$

B3 Με α = 8 ο πίνακας της υπόθεσης φαίνεται δίπλα οπότε:

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	x_if_i	$(x_i-\bar{x})^2v_i$
[5–15)	10	12	20	12	20	2	2352
[15–25)	20	18	30	30	50	6	288
[25–35)	30	24	40	54	90	12	864
[35–45)	40	6	10	60	100	4	1536
ΣΥΝ.		60	100			24	5040

Μέση Τιμή $\bar{x} = \sum_{v=1}^{60} x_i \cdot f_i = 24$

Διακύμανση $s^2 = \dfrac{\sum_{v=1}^{60} (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} =$

$= \dfrac{5040}{60} = 84$

Τυπική απόκλιση $s = \sqrt{84} \simeq 9,17$

B4 Οι μαθητές που χρειάστηκαν $t \geq 37$, ανήκουν στα $\frac{4}{5}$ της 4ης κλάσης οπότε το ποσοστό αυτών είναι τα $\boxed{\frac{4}{5} f_4\% = 8\%}$

Ζήτημα ③

Δίνονται οι πιθανότητες: $P(\Gamma) = \dfrac{3v}{v^2+1}$, $P(I) = \dfrac{v+2}{v^2+1}$, $P(\Gamma \cap I) = \dfrac{v+1}{v^2+1}$ και

$$P(\Gamma \cup I) = \lim_{x \to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} = \lim_{x \to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{2\left(x^2+3-4\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x \to -1} \frac{2(x+1)(x-1)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{2\cdot(-2)}{-\left(\sqrt{4}+2\right)}$$

δηλ. τελικά $P(\Gamma \cup I) = 1$.

Γ1 Το ενδεχόμενο λοιπόν "μία τουλάχιστον γλώσσα" αφού έχει πιθανότητα $\mathbf{P(\Gamma \cup I) = 1}$, είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2 Από προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I) = P(\Gamma \cup I) \Leftrightarrow \frac{3v}{v^2+1} + \frac{v+2}{v^2+1} - \frac{v+1}{v^2+1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3v+1}{v^2+1} = 1 \Leftrightarrow v^2 + 1 = 3v + 1 \overset{v \geq 3}{\Leftrightarrow} \boxed{\mathbf{v = 3}}$$

Γ3 Το ενδεχόμενο "μία μόνο γλώσσα" είναι το $(\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)$ με πιθανότητα $P\left[(\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)\right] = P(\Gamma \cup I) - P(\Gamma \cap I) \overset{v=3}{=} 1 - \dfrac{4}{10} = \mathbf{\dfrac{6}{10}}$.

Γ4 Το ενδεχόμενο "και τις 2 γλώσσες" είναι το $\Gamma \cap I$ με πιθανότητα από προηγούμενο ερώτημα (για v = 3) $P(\Gamma \cap I) \overset{v=3}{=} \dfrac{4}{10} \Leftrightarrow \dfrac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{10}$

και με $N(\Gamma \cap I) = 32$ από υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{32}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{N(\Omega) = 80}}$$

ΖΗΤΗΜΑ ④

Δ1 Είναι $f(x) = \dfrac{1 + \ln^2 x}{x}$ με Π.Ο το $(0,+\infty)$ και συνεχής σε αυτό.

Είναι $f'(x) = \dfrac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \left(1 + \ln^2 x\right)}{x^2} = \dfrac{-(\ln x - 1)^2}{x^2}$ δηλ. $f'(x) < 0$ για κάθε $x \neq e$

και αφού η $f(x)$ συνεχής στο $x = e$ είναι $f(x) \downarrow$ στο $(0,+\infty)$.

Δ2 Τα σημεία $O(0,0)$, $M(x,f(x))$, $K(x,0)$, $\Lambda(0,f(x))$ σχηματίζουν ορθογωνιο εμβαδού $E = (OK)(O\Lambda) = |x| \cdot |f(x)| = x \cdot f(x) = 1 + \ln^2 x$, αφού $x > 0$ και $f(x) > 0$.

Μας ζητούν τη μονοτονία της (έστω) $g(x) = 1 + \ln^2 x$.

Για $x > 0$ είναι $g'(x) = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}$ και από $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Η μονοτονία της g φαίνεται στον διπλανό πίνακα.
Ελάχιστη τιμή για $x = 1$, και τότε $f(1) = 1$, οπότε τα σημεία είναι $O(0,0)$, $K(1,0)$, $M(1,1)$, $\Lambda(0,1)$, που προφανώς σχηματίζουν τετράγωνο πλευράς 1.

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	ολικό min	$\nearrow$	

Δ3 Η εφαπτόμενη της f στο $\Sigma(1,f(1))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$f'(1) = \dfrac{-(\ln 1 - 1)^2}{1^2} = -1$ και αφού είναι παράλληλη με την ευθεία ε: $y = \lambda x + \beta$,

με $\beta \neq 10$, είναι $f'(1) = \lambda = -1$, δηλ. $\boxed{\boldsymbol{\varepsilon: y = -x + \beta}}$

Έχουμε 10 σημεία (x_i,y_i) της ε με τις τετμημένες x_i να έχουν $\left\langle \begin{array}{l} \text{Μέση Τιμή } \bar{x} = 10 \\ \text{Τ. Απόκλιση } s_x = 2 \end{array}\right.$.

Τότε οι παρατηρήσεις (τεταγμένες) $y_i = -x_i + \beta$ έχουν $\left\langle \begin{array}{l} \text{Μέση Τιμή } \bar{y} = -\bar{x} + \beta \\ \text{Τ. Απόκλιση } s_y = s_x = 2 \end{array}\right.$

και συντελεστή μεταβολής $CV = \dfrac{s_y}{|\bar{y}|} = \dfrac{2}{|\beta - 10|}$.

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει $CV \leq 10\% \Leftrightarrow \dfrac{2}{|\beta - 10|} \leq \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow$

$$|\beta - 10| \geq 20 \left\langle \begin{array}{l} \beta - 10 \geq 20 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta \geq 30} \\ \beta - 10 \leq -20 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta \leq -10} \end{array}\right.$$

Δ4 Από το 1ο ερώτημα ξέρουμε ότι η f(x) $\downarrow$.

Ισχύουν $\begin{cases} A \subseteq A \cup B \quad \text{άρα} \quad P(A) \leq P(A \cup B) \quad \text{οπότε} \quad f(P(A)) \geq f(P(A \cup B)) \\ A \cap B \subseteq A \cup B \text{ άρα } P(A \cap B) \leq P(A \cup B) \text{ οπότε } f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B)) \end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει: $\mathbf{f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))}$

Καλή Επιτυχία